

الصفحة	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة الاستدراعية 2025 -الموضوع-		المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني لامتحانات المدرسية وتقييم التعلّات
1			
5			
Y**			
Ω	LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL	RS - 24F	

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse(7.75 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse(2.25 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique(3 pts)
- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (7.75 points)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2 + 1} \text{ si } x \in]0; +\infty[$$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

- 0.25 1-a) Etudier la continuité de f à droite en 0
- 0.25x2 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.25x3 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2- Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$
- 0.5 a) Dresser le tableau de variations de φ
- 0.5 b) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right[$ (On donne $\ln 2 \simeq 0.7$ et $\ln 3 \simeq 1.1$)
- 0.25 c) Montrer que : $f(\beta) = -\frac{\beta^2}{2}$
- 0.5 3-a) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(x^2 + 1)^2}$
- 0.5 b) Donner le tableau de variations de f
- 0.25 c) Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $]\beta; +\infty[$
- 0.5 d) Montrer que la droite d'équation $y = \beta x - \frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$
- 0.5 4- Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion)

Partie II :

On pose $J =]\sqrt{3}; 2[$ et $\alpha = \frac{1}{\beta}$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{e^{1 + \frac{1}{x^2}}}$

- 0.25 1-a) Etudier les variations de g
- 0.25 b) Montrer que : $(\forall x \in J) ; \sqrt{3} < g(x) < 2$
(On donne $\sqrt{3} \simeq 1.73$, $e^{\frac{2}{3}} \simeq 1.95$ et $e^{\frac{5}{8}} \simeq 1.87$)
- 0.25 2-a) En utilisant le résultat de la question I.3-c), montrer que : $g(\alpha) = \alpha$

الصفحة	3	RS - 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2025 - الموضوع	Ω
5			- مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	

- 0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in J) ; |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$
- 0.5 c) En déduire que : $(\forall x \in J) ; |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} |x - \alpha|$
- 3- On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
- $$x_0 = \frac{7}{4} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} , x_{n+1} = g(x_n)$$
- 0.25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; x_n \in J$
- 0.5 b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$
- 0.25 c) En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $(\forall n \geq 2) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- 0.25 a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$,
on a : $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$
- 0.25 b) En déduire que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\} ; \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$
- 0.5 2- a) Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$
- 0.5 b) En déduire que : $(\forall n \geq 2) ; u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(x) dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$
- 0.5 c) Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; -1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$
- 0.25 d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Soit $\theta \in [0, \pi[$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation (E_θ) d'inconnue z

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta} z - ie^{i2\theta} = 0$$

الصفحة	4	RS - 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2025 - الموضوع	Ω
5			- مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	

- 0.25 1- a) Vérifier que : $(E_\theta) \Leftrightarrow (2z + (1-i)e^{i\theta})^2 = ((1+i)e^{i\theta})^2$
- 0.5 b) En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\text{Im}(z_1) \leq 0$
- 0.25 2- a) Montrer que : $\frac{z_1+1}{z_2+i} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$
- 0.25 b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe : $\frac{z_1+iz_2}{z_2+i}$

Partie II :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A , B , et C d'affixes respectives $a = e^{i\theta}$, $b = (1+i)e^{i\theta}$ et $c = b - a$

Soient m un nombre réel de $]0;1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et le point Q

d'affixe $q = me^{i\theta}$

- 0.25 1- a) Déterminer l'affixe p du point P l'image du point Q par la rotation R
- 0.25 b) Vérifier que : $R(A) = C$
- 2- Soit H le point d'affixe $h = \frac{m}{m-i} e^{i\theta}$
- 0.5 a) Montrer que : $\frac{p-a}{h} = \frac{m^2+1}{m} i$ et $\frac{h-a}{p-a} = \frac{1}{m^2+1}$
- 0.25 b) En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP)
- 0.5 c) Montrer que : $\frac{b-h}{q-h} = \frac{1}{m} i$
- 0.25 d) En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.
- 0.25 e) Montrer que les points A , Q , H et B sont cocycliques.

EXERCICE4 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{d}$ où a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$

1- On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0)

- 0.5 a) Montrer que : d divise bc
- 0.5 b) En déduire que : d divise b
- 2- On suppose que d divise b et on pose : $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.
- 0.5 a) Montrer que qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que : $dnu - av = 1$
- 0.75 b) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est
- $$S = \{(-vcn + bk; -ucn + ak) / k \in \mathbb{Z}\}$$

- 0.75 3- Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (F): $y = \frac{3}{2975}x - \frac{2}{119}$
(On donne : $2975 = 119 \times 25$)

EXERCICE5 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et d'unité la matrice } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On munit l'ensemble $E = \{x + yi / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ par la loi de composition interne *

définie par : $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{Z}^4 ; (x + yi) * (x' + y'i) = (x + (-1)^y x') + (y + y')i$

Partie I :

- 0.25 1- a) Vérifier que : $(1 - i) * (3 + 2i) = -2 + i$
0.25 b) Montrer que la loi * n'est pas commutative dans E
0.5 2- Montrer que la loi * est associative dans E
0.25 3- Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi * dans E
0.25 4- a) Vérifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; (x + yi) * ((-1)^{(y+1)} x - yi) = 0$
0.25 b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II :

Soient les deux ensembles $F = \{x + 2yi / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et

$$G = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z} \right\}$$

- 0.5 1- a) Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$
0.25 b) Montrer que la loi * est commutative dans F
2- Soit φ l'application définie de F vers $M_3(\mathbb{R})$ par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(x + 2yi) = M(x, y)$$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F, *)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$
0.25 b) Montrer que $\varphi(F) = G$
0.25 c) En déduire que (G, \times) est un groupe commutatif.

FIN